Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 35, No. 6, pp. 1361–1375, 1992
Printed in Great Britain

0017-9310/92 $5.00+0.00
Pergamon Press Ltd

Thermodynamique des réseaux d'échangeurs de chaleur, et possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs dans ces réseaux—II. Etude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs

C. GUIGLION, L. PIBOULEAU et S. DOMENECH
ENSIGC-URA CNRS 192, Chemin de la loge, 31078 Toulouse Cedex, France

(*Reçu le* 14 *Juin* 1990 *et sous forme finale le* 28 *Juin* 1991)

Résumé—Après avoir présenté, dans une première partie, une étude thermodynamique de réseaux d'échangeurs, nous l'appliquons ici à l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs. On présente une vue d'ensemble de ces possibilités, qui met en évidence, en particulier, le rôle néfaste de facteurs comme : une mauvaise disposition relative des intervalles de températures concernés, des conditions voisines de celles que nous avons appelées strictement cohérentes, des variations (avec la température) des chaleurs spécifiques.

1. INTERET DE CERTAINES LIMITATIONS DE LA GENERALITE DE L'ETUDE

POUR NOTRE approche théorique, nous avons adopté le point de vue que le choix d'un réseau d'échangeur chargé de satisfaire la demande considérée ne vise qu'à diminuer autant que possible : la consommation d'utilités, le facteur entropique d'aire d'échange et le nombre d'échangeurs.

D'une manière générale, les conditions de chacune de ces trois sortes de diminution ne sont pas compatibles entre elles, il s'agit de réaliser un compromis. Pour simplifier encore l'approche, on est naturellement amené à éliminer les problèmes que posent le choix des utilités et des réchauffements et refroidissements qu'elles devront subir. C'est pourquoi dans cette dernière partie, on se limitera, en supposant toujours qu'a été préalablement fixée la valeur e qui détermine la contrainte $\Delta T \geqslant e$, aux demandes cohérentes et aux réseaux autonomes. Cela revient à négliger toutes les possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs liées aux choix :

de la partie de la demande qui sera confiée au réseau interne ;
des réchauffements des utilités froides et refroidissements des utilités chaudes que seront imposées au réseau externe.

En fait, les possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs liées avec le second de ces deux choix, une fois que le premier a été effectué, sont plutôt évidentes. Il s'agit de ne pas utiliser plus d'un échangeur pour chaque fraction de la demande laissée au réseau externe après avoir réuni ces fractions les unes aux autres autant que cela était possible. Il semble que, d'une manière générale, cela peut se faire sans beaucoup compromettre ni les économies d'utilité, ni l'économie d'aire d'échange. Par contre, notre, étude aurait besoin d'être complétée pour tenir compte des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs liées au premier de ces deux choix.

Quoiqu'il en soit, ayant éliminé le problème de la consommation des utilités, il ne reste plus qu'à réaliser un compromis entre diminution du facteur entropique d'aire d'échange et diminution du nombre d'échangeurs. Nous avons vu dans la première partie de cet article que le choix d'un réseau à contre-courant est toujours possible et que ce choix permet de minimiser le facteur entropique d'aire d'échange, il es donc naturel d'examiner dans quelle mesure cela compromet la diminution du nombre d'échangeurs. C'est pourquoi, dans cette partie, l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs sera souvent limité à la considération des réseaux à contre-courant.

Nous avons vu aussi que dans le cas d'une demande strictement cohérente, ne se pose plus la question d'un compromis entre diminution du facteur d'aire d'échange et diminution du nombre d'échangeurs (du moins dans le cadre de l'approche que nous avons adoptée). Car, de toute façon, le contre-courant est imposé, en sorte que le facteur entropique d'aire d'échange n'est plus susceptible de varier avec le réseau autonome considéré. Ainsi, dans le cas d'une demande strictement cohérente, la diminution du nombre d'échangeurs devient, dans notre approche, l'unique préoccupation. D'où l'intérêt de se limiter parfois aux demandes strictement cohérentes. Certes, nous avons vu que les demandes strictement cohérentes constituent une famille extrême de demandes cohérentes. Mais on peut penser que les demandes cohérentes

NOMENCLATURE

C	nombre cyclomatique du réseau considéré
d	degré de déconnexion réel de la demande considérée
D	nombre d'éléments d'une division
D_{MAX}	degré de déconnexion apparent de la demande considérée
e	limite inférieure d'écart de température
E	nombre d'échangeurs
E_{MIN}	nombre minimum d'échangeur d'un réseau acceptable pour la demande considérée
E^*_{MIN}	nombre minimum d'échangeur d'un réseau à contre-courant-acceptable pour la demande considérée
$M(f_1, f_2, e)$	borne inférieure des valeurs prises par $f_1(x_1)+f_2(x_2)$ lorsque x_1 et x_2 varient sous la contrainte $(x_2-x_1) = e$
n	degré de fractionnement de la demande
n_F, n_C	degré de fractionnement de la demande en réchauffements (resp: refroidissements)
N	nombre de courants
N_F, N_C	nombre de courants froids (resp: chauds)
P	degré de partition du réseau considéré
q_F, q_C	fonction représentative des réchauffements (resp: refroidissements) demandés
q_F, q_C	fonction représentative d'une partie des réchauffements (resp: refroidissements) demandés
Q	débit thermique échangé
Q_F, Q_C	débit thermique consommé (resp: fourni) par les réchauffements (resp: refroidissements) demandés
$Q_R(e)$	débit thermique récupérable sous la contrainte $\Delta T \geqslant e$
ΔT	paramètre d'écart de température d'un réseau.

Symboles grecs

θ_F, θ_C	fonctions auxilliaires de représentation des réchauffements (resp: refroidissements) demandés
σ	facteur de liberté de choix des couplages.

voisines conduisent à des possibilités voisines de diminution du nombre d'échangeurs d'un réseau autonome.

2. NECESSITE D'UNE REPRESENTATION DETAILLEE DE LA DEMANDE

Dans les questions qui précèdent, les fonctions q_F et q_C fournissaient une représentation suffisante de la demande considérée (par exemple: les fonctions θ_F et θ_C se déduisent mathématiquement de la donnée des fonctions q_F et q_C).

Cependent, dans d'autres questions, il y a lieu de considérer l'ensemble des fonctions représentatives de l'un des réchauffements demandés plutôt que la fonction q_F qui est la somme des fonctions appartenant à cet ensemble, et l'ensemble des fonctions représentatives de l'un des refroidissements demandés plutôt que la fonction q_C qui est la somme des fonctions appartenant a cet ensemble. C'est que, dans les deux résultats de ces deux sommes, beaucoup d'informations concernant les termes ajoiutés les uns aux autres sont perdues. Sont perdues en particulier des informations indispensables du point de vue de l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs d'un réseau chargé d'effectuer la demande. Ainsi, pour cette étude, les fonctions q_F et q_C constituent une représentation de la demande qui est trop globale pour suffire.

La représentation détaillée de la demande dont nous aurons besoin fait appel à des notions, généralement traitées sans rigueur, concernant les possibilités de diviser une demande ou, au contraire, de réunir plusieurs demandes en une seule.

3. TACHES ET RESEAUX DE TACHES

Nous appellerons tâche, tout élément constitutif d'une demande (réchauffement demandé ou refroidissement demandé). Une tâche est déterminée par le courant de matière, supposé homogène, qui la concerne er la transformation thermodynamique qu'il doit subir. On admet que cette transformation peut se faire par gain (dans le cas d'un réchauffement) ou perte (dans le cas d'un refroidissement) de chaleur à pression constante, en sorte qu'elle peut être déterminée en fixant, outre le courant de matière concerné et la pression concernée, les niveaux thermiques initial et final.

S'il s'agit d'un tâche ne comportant aucun changement de phase, alors les deux niveaux thermiques extrêmes pourront être caractérisés par leurs températures. S'il s'agit d'une tâche comprenant un (ou plusieurs) changement de phase, alors les deux niveaux thermiques extrêmes pourront être caractérisés par leurs enthalpies spécifiques.

Nous appellerons fraction d'une tâche X, toute tâche contenue dans las tâche X. Cette fraction sera déterminée en fixant une fraction du courant de matière donné avec X, et un intervalle de niveaux thermiques contenu dans celui donné avec X.

Nous dirons que deux tâches sont disjointes, si et seulement si elles n'ont pas une fraction commune.

Nous dirons que deux tâches sont séparées lorsqu'elles diffèrent au point de vue de la composition chimique ou de la pression. En sorte qu'on ne peut former une troisième tâche en réunissant une fraction de la première et une fraction de la deuxième. Bien entendu deux tâches séparées sont disjointes.

Nous appellerons réseau de tâches, tout ensemble de tâches disjointes les unes des autres. Il s'agira, plus précisément, soit d'un réseau de tâches demandées (on peut parler alors, pour être plus bref, d'une demande), soit d'un réseau de tâches effectuées dans un réseau d'échangeurs. Un sous-réseau d'un réseau de tâches est un sous-ensemble de l'ensemble que constitue ce réseau de tâches. Un réseau de tâches compris dans un réseau de tâches donné est constitué de fractions des tâches qui constituent le réseau de tâches donné. Ainsi, tout sous-réseau d'un réseau donné est un réseau compris dans le réseau donné, mais la réciproque n'est pas vraie.

Lorsqu'un réseau de tâches est considéré comme une demande, au lieu de sous-réseau de ce réseau, on parle de sous-demande de cette demande ; au lieu de réseau compris dans ce réseau, on parle de partie de cette demande. Ainsi, toute sous-demande d'une demande est une partie de cette demande, mais la réciproque n'est pas vraie.

Nous dirons que deux réseaux de tâches sont équivalents, lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre grâce aux deux opérations de décomposition d'une tâche en un réseau de tâches, et de réunion, lorsque cela est possible, d'un réseau de tâches en une seule tâche. (Il revient au même de dire qu'on peut passer du premier réseau et du second réseau à un même troisième, grâce à la seule opération de décomposition des tâches.)

Dans la plupart des circonstances, il n'y a pas lieu de distinguer deux réseaux de tâches qui ne sont pas constitués des mêmes tâches mais qui sont équivalents. Le plus souvent il ne s'agit que de deux façons de présenter une même demande. En particulier, il faut noter que les fonctions q_F et q_C ne changent pas lorsqu'on remplace la demande considérée par une demande équivalente. Néanmoins, lorsqu'on s'intéresse aux nombres d'échangeurs des réseaux d'échangeurs, la distinction de deux réseaux de tâches équivalents est parfois indispensable.

Nous définissons le degré de fractionnement d'un réseau de tâches X, comme la plus petite valeur que peut prendre le nombre de tâches d'un réseau de tâches équivalent à X. On notera que le degré de fractionnement d'un réseau da tâches compris dans un réseau de tâches donné, peut dépasser toute limite donnée. Un réseau de tâches sera dit compact lorsque son degré de fractionnement est égal au nombre de tâches qui le constituent.

Considérons un réseau de tâches X et un réseau de tâches P compris dans X. Si l'on effectue P, alors ce qu'il reste à effectuer, pour effectuer X, peut toujours être présenté sous la forme d'un autre réseau de tâches P', lui aussi compris dans X. Dans ces conditions, nous dirons que P et P' sont complémentaires relativement à X. Pour X et P donnés, il y a une infinité de P' tels que P et P' soient complémentaires relativement à X. Mais, tous ces P' sont équivalents les uns aux autres et, par conséquent, ils ont tous un même degré de fractionnement. Ce degré de fractionnement sera appelé degré de cofractionnement du réseau de tâches P, par rapport au réseau de tâches X.

On notera que si le réseau de tâches P est compris dans le réseau de tâches X, n est le degré de fractionnement de X, p le degré de fractionnement de P, p' le degré de cofractionnement de P par rapport à X. Alors $p+p' \geqslant n$.

On notera que le degré de cofractionnement d'une fraction d'une tâche par rapport à la totalité de cette tâche ne peut être que 0, 1, 2 ou 3. Plus précisément, si l'on désigne par D, T_1, T_2, le débit massique, le plus petit et le plus grand des deux niveaux thermiques extrêmes, pour une tâche donnée. Si l'on désigne par D', T'_1, T'_2 les mêmes paramètres pour une fraction de cette tâche, alors les variables D, T_1, T_2 sont soumises aux contraintes :

$$D' \leqslant D$$

$$T'_1 \geqslant T_1$$

$$T'_2 \leqslant T_2.$$

Le degré de cofractionnement de la fraction par rapport à la totalité est égal au nombre de celles, parmi les trois inégalités précédentes, qui ne sont pas saturées.

4. REPRESENTATIONS DETAILLEES DE LA DEMANDE

Pour distinguer parmi les propriétés de demandes, celles qui sont déterminées par q_F et q_C, de celles qui ne le sont pas, nous dirons des premières qu'elles sont indépendantes, et des secondes qu'elles dépendent des détails de la demande (ou de la découpe de la demande).

Parmi les propriétés de la demande qui dépendent de ses détails, nous pouvons tout de suite présenter quelques-unes de celles qui nous seront les plus utiles ensuite :

- N et n nombre d'éléments et degré de fractionnement de la demande considérée ;
- N_F et n_F nombre d'éléments et degré de fractionnement de l'ensemble des réchauffements demandés ;
- N_C et n_C nombre d'éléments et degré de fractionnement de l'ensemble des refroidissements demandés.

On a, bien entendu :

$$N = N_F + N_C$$

$$n = n_F + n_C.$$

Les paramètres N, N_F et N_C dépendent de la forme sous laquelle est présentée la demande, les paramètres n, n_F et n_C n'en dépendent pas.

Pour une demande présentée sous une forme compacte :

$$n = N$$

$$n_F = N_F$$

$$n_C = N_C.$$

On utilisera aussi diverses propriétés qualitatives.

Nous dirons qu'une demande est dispersée lorsque les tâches de réchauffement d'une part, les tâches de refroidissement d'autre part, sont séparées les unes des autres. Il s'agit d'une propriété qui dépend de la forme sous laquelle est présentée la demande. Nous dirons d'une demande qu'elle est dispersable, lorsqu'elle est équivalente à une demande dispersée. Comme d'une part le cas d'une demande dispersable nous semble être celui le plus souvent rencontré en pratique, et comme d'autre part ce cas fera l'objet d'un traitement théorique qui exclut les autres cas, nous avons décidé d'appeler, dans ce travail, demande ordinaire, toute demande dispersable.

Une demande sera dite découpée horizontalement pour ce qui est des réchauffements (respectivement : refroidissements) demandés, lorsque les deux intervalles de température déterminés par deux des réchauffements (respectivement : deux des refroidissements) demandés sont disjoints.

Une demande sera dite découpée verticalement pour ce qui est des réchauffements (respectivement : refroidissements) demandés, lorsque les deux intervalles de températures demandés par deux des réchauffements (respectivement : refroidissements) demandés sont égaux, et lorsque, de plus, les deux fonctions représentatives de ces deux tâches sont proportionnelles l'une à l'autre. (La seconde condition découle de la première lorsqu'on se limite à des tâches où les chaleurs spécifiques sont constantes et les changements de phases sont exclus.)

Une demande sera dite de type, respectivement :

(H, H)
(V, V)
(H, V)
(V, H).

Lorsque les réchauffements demandés sont découpés, respectivement :

horizontalement
verticalement
horizontalement
verticalement.

Tandis que les refroidissements demandés sont découpés respectivement :

horizontalement
verticalement
verticalement
horizontalement.

Les propriétés d'être du type (H, H), du type (V, V), du type (H, V), du type (V, H) dépendent de la forme sous laquelle est présentée la demande.

Nous dirons aussi :

demande à découpe horizontale, au lieu de : demande de type (H, H)
demande à découpe verticale, au lieu de : demande de type (V, V)
demande à découpe croisée, au lieu de : demande de type (H, V) ou (V, H).

Lorsqu'on s'intéresse aux détails de la demande, le cas le plus simple n'est plus celui où les fonctions q_F et q_C sont continues et affines par morceaux. Il est plutôt celui où les changements de phases sont exclus, et les chaleurs spécifiques concernées sont égales les unes aux autres pour une composition chimique et une pression déterminées. En ce cas, nous dirons que la demande considérée est linéaire dans ses détails. On notera qu'il s'agit d'une propriété qui dépend des détails de la demande considérée, mais non de la forme sous laquelle elle est présentée.

Bien entendu, toute demande linéaire dans ses détails est une demande continue et affine par morceaux, mais la réciproque n'est pas vraie.

Pour finir, nous allons définir deux paramètres qui dépendent non seulement de la demande considérée, mais aussi de la valeur attribuée à e, et qui ne concernent que les demandes cohérentes pour cette valeur de e.

Le degré de déconnexion apparent de la demande cohérente considérée, D_{MAX}, est la valeur maximum que peut prendre le nombre d'éléments d'une division de cette demande en sous-demandes cohérentes.

Le degré de déconnexion réel de la demande cohérente considérée, d, est la valeur maximum que peut prendre le degré de connexion apparent d'une demande cohérente compacte et équivalente à la demande considérée. Toute demande peut être mise sous une forme telle que : $n = N$, $d = D_{MAX}$ (il s'agit alors d'une forme sous laquelle elle est compacte). La demande cohérente considérée sera dite connexe, lorsque $d = 1$. D_{MAX} dépend de la forme sous laquelle est présentée la demande, d n'en dépend pas.

Supposons que X désigne une demande cohérente et dispersée. Alors, d'une part X est une demande compacte, d'autre part il n'existe pas de demande cohérente qui soit à la fois :

compacte
équivalente à X
différente de X.

Cette remarque permet deux affirmations qui nous serviront ultérieurement. Elle permet d'affirmer d'abord que, pour toute demande cohérente et dispersée, le degré de connexion réel d est égal au degré de connexion apparent D.

Elle permet d'affirmer ensuite que le degré de connexion réel d'une demande cohérente ordinaire vaut le degré de connexion réel (ou apparent) de la seule demande cohérente et dispersée qui est équivalente à cette demande cohérente et ordinaire.

5. CONTRAINTE TECHNOLOGIQUE FONDAMENTALE ET RESEAUX ACCEPTABLES

Fixons une valeur de e et une demande cohérente pour cette valeur de e et faisons varier le réseau d'échangeurs chargé de la satisfaire. E désignera le nombre d'échangeurs du réseau considéré. Si les seules conditions restrictives concernant ce réseau sont celles qui l'astreignent à être un réseau autonome, alors il n'y a pas de limitation inférieure au nombre d'échangeurs. En effet, la thermodynamique n'interdit nullement de faire tous les échanges dans un seul échangeur (muni de cloisons pour éviter les mélanges indésirables).

Les possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs ne peuvent pas être limitées par la seule thermodynamique. Il faut faire intervenir des contraintes technolgiques concernant les réseaux d'échangeurs. L'étude qui suit sera fondée sur l'introduction d'une contrainte technologique, que nous appellerons la contrainte technologique fondamentale.

Cette contrainte exige que d'une part les réchauffements effectués dans un échangeur doivent être équivalents à une seule tâche de réchauffement (autrement dit, ils doivent avoir un degré de fractionnement égal à 1). D'autre part, les refroidissements effectués dans un échangeur doivent être équivalents à une seule tâche de refroidissement. Bien qu'il s'agisse d'une contrainte très généralement admise dans la conception des réseaux d'échangeurs, en l'introduisant, nous ne voulons pas dire qu'il y a toujours lieu de l'admettre mais simplement que nous nous intéresserons seulement aux cas où elle est admise.

Désormais, nous appellerons réseaux acceptables, les réseaux autonomes qui satisfont la contrainte technologique fondamentale. La distinction entre les réseaux d'échangeurs qui seront déclarés acceptables et les autres est dont relative à la demande considérée et à la valeur de e considérée.

Si l'on se limite aux réseaux acceptables, alors on obtient la minoration :

$$\mathrm{Max}\,(n_F, n_C) \leqslant E.$$

On remarquera que si la demande cohérente considérée n'est pas compacte, on peut très bien avoir, dans un réseau acceptable :

$$\mathrm{Max}\,(N_F, N_C) > E.$$

On remarquera que quelque soient n_F et n_C, il est facile d'imaginer des cas de demandes cohérentes et de réseaux d'échangeurs acceptables, pour lesquels l'inégalité $\mathrm{Max}\,(n_F, n_C) \leqslant E$ sera saturée.

En sorte que, sous les conditions restrictives admises (demande cohérente, réseaux acceptables), la minoration :

$$\mathrm{Max}\,(n_F, n_C) \leqslant E$$

parait comme la meilleure possible parmi celle où la demande est représentée par n_F et n_C. Lorsqu'on ajoute d'autres conditions restrictives, cette minoration reste, bien entendu, toujours valable, mais peut cesser d'être la meilleure.

Désormais, pour simplifier l'étude, les demandes considérées seront supposées cohérentes (pour la valeur de e considérée), et les réseaux considérés seront supposés acceptables (pour la valeur de e considérée, et la demande cohérente considérée). E_{MIN} désigne le nombre minimum d'échangeurs d'un réseau acceptable pour la demande cohérente considérée.

Compte tenu de la contrainte technologique fondamentale, on peut considérer que déterminer un échangeur d'un point de vue thermodynamique, c'est déterminer un échange, c'est-à-dire un couple de tâches, formé par une tâche de réchauffement et une tâche de refroidissement, pouvant se faire l'une par l'autre.

Dès lors, il devient possible, par analogie avec les définitions présentées au paragraphe 3, de définir ou redéfinir les notions de :

fraction d'un échange
échanges disjoints
réseaux d'échanges
sous-réseau d'un réseau d'échange
réseau d'échange compris dans un autre réseau d'échange
équivalence de deux réseaux d'échanges
degré de fractionnement d'un réseau d'échange
réseau d'échange compact.

Sauf pour la notion d'échanges disjoints, il suffit de reprendre les définitions du paragraphe 3, en remplaçant systématiquement 'tâche' par 'échange'. Par contre, la définition des échanges disjoints ne doit pas être : deux échanges sont disjoints lorsqu'ils n'ont aucune fraction commune. Elle doit être : deux échanges sont disjoints lorsque leurs deux tâches de réchauffement d'une part et leurs deux tâches de refroidissement d'autre part, sont disjointes.

Du point de vue de l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs, lorsqu'on tient compte de la contrainte technologique fondamentale, la notion d'équivalence entre réseaux d'échangeurs est particulièrement importante. En effet, lorsqu'on remplace le réseau d'échangeurs considéré par un réseau d'échangeurs équivalent, ni le paramètre de récupération d'énergie, ni le paramètre d'écart de température, ni le facteur entropique d'aire d'échange, ne sont changés ; ne sont pas non plus changées, ni la propriété d'être ou ne pas être un réseau autonome, ni la propriété d'être ou ne pas être un réseau à contre-courant.

Par contre, peuvent changer et le nombre d'échangeurs et la propriété de satisfaire ou ne pas satisfaire (relativement à une demande fixée), la contrainte technologique fondamentale.

Cependent, tout réseau d'échangeur est équivalent à un réseau d'échangeur qui satisfait la contrainte technologique fondamentale. A cause de cela, la plupart des propositions énoncées dans la première partie de cet article restent valables en remplaçant 'autonome' par 'acceptable'.

6. POSSIBILITES DE MAJORATION DE E_{MIN} ET POSSIBILITES DE VARIATIONS DE CHALEURS SPECIFIQUES AVEC LA TEMPERATURE

Si l'on se contente de conditions restrictives désormais implicitement admises (demandes cohérentes, réseaux acceptables), il semble impossible d'obtenir une fonction de n_F et n_C seulement, qui soit un majorant de E_{MIN} (nombre minimum d'échangeurs d'un réseau acceptable). En effet, en considérant diverses demandes cohérentes, pour n_F et n_C fixes, on s'aperçoit que des $(\partial C_p/\partial T)$ de plus en plus grands, ou des $(\partial C_p/\partial T)$ infinis mais non nuls avec des demandes cohérentes de plus en plus proches de demandes strictement cohérentes, peuvent imposer un E_{MIN} de plus en plus grand, arrivant à dépasser toute limite donnée a priori.

Pour s'en persuader, il suffit de considérer le cas simple d'une demande strictement cohérente, avec deux réchauffements demandés et deux refroidissements demandés, lorsque sont réunies de plus les conditions suivantes (qui ne sont pas incompatibles avec la stricte cohérence de la demande).

Les deux réchauffements demandés correspondent à deux tâches séparées et chacune correspond à une chaleur spécifique constante. Les deux refroidissements demandés correspondent à deux tâches séparées. L'un des deux refroidissements demandés correspond à une chaleur spécifique qui croît linéairement avec la température, l'autre à une chaleur spécifique qui décroît linéairement avec la température. En ce cas, le contre-courant est imposé, mais cela impose à son tour, à cause des variations des chaleurs spécifiques avec la température, que la fraction de l'un des courants chauds couplée avec l'un des courants froids doive constamment varier avec les températures atteintes. Or, compte tenu de la contrainte technologique fondamentale, le réajustement de cette fraction impose de passer d'un échangeur à un autre. En ce cas extrême le nombre de réajustements nécessaires serait infini (en sorte qu'on serait obligé soit de changer la valeur de e, soit de faire appel à des utilités).

Il semble alors intéressant de chercher un majorant du nombre minimum d'échangeurs en se limitant aux demandes linéaires dans leur détails.

7. MAJORATION DU NOMBRE D'ECHANGEURS PERMISE PAR LA LIMITATION AUX RESEAUX SANS COUPLAGE MULTIPLE

Nous dirons que dans un réseau, il y a couplage multiple (relativement à la demande considérée) lorsque plusieurs échangeurs couplent plusieurs fractions d'un même réchauffement demandé avec plusieurs fractions d'un même refroidissement demandé. Si on se limite aux demandes cohérentes et aux réseaux acceptables, aors l'absence de couplage multiple implique que:

$$N_F \cdot N_C \geqslant E.$$

La propriété, pour un réseau acceptable, d'être sans couplage multiple est relative à la demande considérée et en particulier à la forme sous laquelle elle est présentée. Si l'on fait varier la forme sous laquelle est présentée la demande, alors la majoration obtenue est d'autant meilleure que le majorant est plus petit, c'est-à-dire que N_F et N_C sont plus petits. Mais parallèlement, l'absence de couplage multiple est de plus en plus difficile à obtenir.

Se trouve alors posée la question: Dans quelles conditions restrictives concernant la demande, peut-on obtenir l'assurance que parmi les réseaux acceptables, il y a au moins un réseau sans couplage multiple relativement à une présentation compacte de la demande considérée?

Si, dans ces conditions restrictives, on pouvait obtenir cette assurance, alors on pourrait affirmer que:

$$n_F \cdot n_C \geqslant E_{MIN}.$$

D'après ce qui a été vu au paragraphe précédent, il semble nécessaire de proscrire les variations des chaleurs spécifiques avec la température. Mais cela suffit-il? Plus précisément, suffit-il de se limiter parmi les demandes cohérentes, à des demandes linéaires dans leurs détails? La question est importante car, comme nous le verrons plus loin, le paramètre $n_F \cdot n_C$ semble constituer une valeur critique. En effet, parmi les demandes cohérentes et linéaires dans leurs détails, nous trouverons des exemples pour lesquels:

$$E_{MIN} = n_F \cdot n_C$$

mais il paraît difficile (voire, impossible) de trouver des exemples pour lesquels:

$$E_{MIN} > n_F \cdot n_C.$$

Voyons un exemple qui montre qu'il ne suffit pas de se limiter aux demandes cohérentes linéaires dans leurs détails. Nous allons considérer le cas d'une demande linéaire dans ses détails et strictement cohérentes, ce qui impose, puisque l'on veut un réseau acceptable, un réseau à contre-courant.

La demande que nous considérons peut être représentée par la Fig. 1 où les trois colonnes représentent trois intervalles de températures consécutifs, où les lignes horizontales représentent les tâches demandées et les intervalles de température qu'elles concernent, où c_{123}, c_2 représentent les débits des courants à refroidir, f_1, f_{12}, f_{23}, f_3 les débits des courants à réchauffer.

On suppose que les quatre tâches de réchauffement

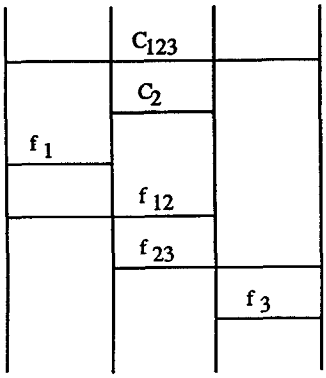

FIG. 1. Représentation schématique de la demande considérée au paragraphe 7.

d'une part, les deux tâches de refroidissement, d'autre part, sont séparées les unes des autres. On suppose encore que les trois intervalles de températures consécutifs considérés représentent chacun l'unité de température et que les six chaleurs spécifiques concernées sont égales à l'unité. L'hypothèse que cette demande est strictement cohérente s'exprime alors par les trois équations :

$$f_1+f_{12} = c_{123}$$
$$f_{12}+f_{23} = c_{123}+c_2$$
$$f_3+f_{23} = c_{123}$$

d'où les inégalités :

$$f_{12}+f_{23} > c_{123}$$
$$f_{12} < c_{123}, \quad f_{23} < c_{123}$$
$$f_{12} > c_2, \quad f_{23} > c_2.$$

Le débit de couplage entre c_{123} et f_{23} vaut f_{23} en colonne 3. Il ne peut valoir 0 en colonne 2 du fait que $f_{23} > c_2$. Donc, dans une solution sans couplage multiple, il vaudrait f_{23} en colonne 2 comme en colonne 3. Le débit de couplage entre c_{123} et f_{12} vaut f_{12} en colonne 1. Il ne peut valoir 0 en colonne 2 du fait que $f_{12} > c_2$. Donc, dans une solution sans couplage multiple, il vaudrait f_{12} en colonne 2 comme en colonne 1. On aurait alors $f_{12}+f_{23} \leqslant c_{123}$, ce qui contredirait l'une des inégalités déduites des hypothèses.

Ainsi, avec cette demande particulièrement simple (quoi que très spéciale puisque strictement cohérente), aucun réseau acceptable ne saurait être sans couplage multiple. Ainsi même la limitation, parmi les demandes cohérentes, à celle qui sont linéaires dans leurs détails, ne permet pas d'assurer qu'il existe au moins un réseau acceptable sans couplage multiple.

Ce résultat négatif nous a amené à nous intéresser davantage à une autre catégorie de réseaux : ceux qui sont sans couplage doublement inachevé.

8. MAJORATION DU NOMBRE D'ECHANGEURS PERMISE PAR LA LIMITATION AUX RESEAUX SANS COUPLAGE DOUBLEMENT INACHEVE

Par rapport à la demande cohérente considérée, nous classerons les couplages effectués par les divers échangeurs du réseau acceptable considéré en :

couplages complets (deux tâches demandées complètes l'une et l'autre)
couplages demi-complets (une tâche complète avec une tâche incomplète)
couplages doublement incomplets (deux tâches incomplètes).

Si on se limite aux demandes cohérentes et aux réseaux acceptables et sans couplage doublement incomplet, alors on est assuré que $N-1 \geqslant E$. Mais, l'assurance que $N-1 \geqslant E$ peut être obtenue dans des conditions beaucoup moins sévères que l'absence de couplage doublement incomplet.

Il suffit qu'on puisse ranger les échangeurs du réseau acceptable considéré dans un ordre tel que chaque échangeur, lorsqu'on ajoute ce qu'il effectue à ce qu'ont effectué les échangeurs précédents, achève au moins l'une des N tâches initialement demandées. Le nombre d'échangeurs sera alors inférieur au nombre N de tâches à achever (c'est-à-dire $E \leqslant N-1$), si l'on tient compte que le dernier échangeur doit de toute façon achever deux tâches.

Lorsque un tel classement des échangeurs du réseau acceptable considéré est possible, nous dirons que ce réseau est sans couplage doublement inachevé. On remarquera que :

$$(N_F \cdot N_C)-(N-1) = N_F \cdot N_C-(N_F+N_C-1)$$
$$= (N_F-1)(N_C-1) \geqslant 0$$

en sorte que la majoration garantie par l'absence de couplage doublement inachevé, est en tout cas au moins aussi bonne, et le plus souvent nettement meilleure que celle garantie par l'absence de couplage multiple.

La propriété, pour un réseau acceptable, d'être sans couplage inachevé, est relative à la demande considérée et en particulier à la forme sous laquelle elle est présentée.

Comme dans le paragraphe précédent, si l'on fait varier la forme sous laquelle est présentée la demande, alors la majoration $N-1 \geqslant E$ est d'autant meilleure que le majorant est plus petit, c'est-à-dire que N est plus petit. Mais parallèlement, un réseau acceptable et sans couplage doublement inachevé est de plus en plus difficile à obtenir.

Nous verrons ensuite que pour de nombreuses demandes cohérentes, il est facile d'obtenir la minoration :

$$N-1 \leqslant E_{\mathrm{MIN}}$$

mais difficile d'obtenir une minoration meilleure (c'est-à-dire un minorant plus grand que $N-1$).

Néanmoins, dans une telle situation, si l'on pouvait obtenir un réseau acceptable sans couplage doublement inachevé, alors on serait assuré d'avoir un réseau acceptable pour lequel:

$$E = E_{MIN}.$$

Il serait donc intéressent de disposer d'un algorithme qui essayerait d'obtenir un réseau acceptable sans couplage doublement inachevé.

Regardons ce que pourrait être un tel algorithme, quelles seraient les possibilités qu'il faudrait, en principe, examiner les unes après les autres en vue de trouver une solution pour laquelle:

$$E = N-1.$$

Il s'agit donc d'examiner des réseaux de $N-1$ échangeurs numérotés de 1 à $N-1$. A chacun de ces numéros, il y a lieu d'associer:

- une variable discrète (à N_F valeurs possibles) pour fixer lequel des réchauffements initialement demandés sera concerné;
- trois variables continues (une débit, deux niveaux thermiques) pour fixer la fraction de ce réchauffement qui sera concernée;
- une variable discrète (à N_C valeurs possibles) pour fixer lequel des refroidissements initialement demandés sera concerné;
- trois variables continues (une débit, deux niveaux thermiques) pour fixer la fraction de ce refroidissement qui sera concernée;
- un variable discrète (à deux valeurs possibles) qui fixera laquelle des deux tâches effectuées (le réchauffement ou le refroidissement) correspondra à l'achèvement de l'une des tâches initialement demandées.

Dès lors, automatiquement, les trois variables continues associées à la tâche effectuée et qui achève une tâche initialement demandée, sont déterminées par la connaissance de toutes les tâches effectuées auparavant. L'une des trois variables continues associées à l'autre tâche effectuée est déterminée par bilan thermique.

Il reste alors deux variables continues par numéro d'échangeur. Mais, ces variables continues sont éliminées si l'on ajoute les contraintes (très naturelles en vue de diminuer le nombre d'échangeurs) supplémentaires suivantes.

A chaque stade, il s'agit d'effectuer une tâche de refroidissement qui soit une fraction de l'une des tâches qu'il reste à effectuer, dont le degré de cofractionnement (par rapport à cette tâche qu'il reste à effectuer) devra être égal à 1.

Conformément à ce qui a été dit au paragraphe 3, cela impose qu'ait lieu deux des trois égalités:

$$Q = Q'$$

$$T_1 = T'_1$$

$$T_2 = T'_2$$

où Q, T_1, T_2 sont les trois paramètres de la tâche qu'il reste à effectuer et Q', T'_1, T'_2 sont les trois paramètres de la fraction considérée de cette tâche.

C'est l'imposition, à chaque stade, de deux égalités de ce type qui éliminera les deux variables continues qui restaient disponibles, tout en rendant nécessaires l'introduction d'une nouvelle variable discrète (à trois valeurs possibles) pour fixer laquelle des trois égalités possibles ne sera pas satisfaite.

On tombe alors sur un ensemble fini de solutions a priori possibles, ayant un nombre d'éléments en tout cas inférieur à:

$$\frac{N!N!}{2 \cdot N}(N-2)^6.$$

Dans les cas où l'on rencontrerait une solution acceptable, il resterait encore à décider si elle ne doit pas être finalement rejetée à cause d'un facteur entropique d'aire d'échange trop élevé.

9. RELATIONS DEDUITES DE LA THEORIE DES GRAPHES

Renvoyons à [6] pour les éléments de la théorie des graphes et des multigraphes que nous allons utiliser. Dans un multigraphe, si a est le nombre d'arcs, s est le nombre de sommets, c est le nombre cyclomatique (nombre maximum de cycles indépendants les uns des autres que l'on puisse inscrire dans ce multigraphe), p est le nombre de composantes connexes. Alors:

$$a = s+c-p. \tag{1}$$

Définissons le multigraphe descriptif d'un réseau d'échangeurs acceptable de la manière suivante. Les sommets sont les tâches demandées. Les arcs vont des tâches de réchauffement aux tâches de refroidissement (des courants froids aux courants chauds). Il y a autant d'arcs allant d'une tâche de réchauffement à une tâche de refroidissement qu'il y a d'échangeurs effectuant une fraction de cette tâche de réchauffement et une fraction de cette tâche de refroidissement.

Pour que le multigraphe que nous venons de définir soit un graphe (c'est-à-dire pour que tout couple de sommet soit relié, dans un sens donné, par un arc au plus), il faut et il suffit que le réseau d'échangeurs considéré soit sans couplage multiple.

Regardons maintenant ce que deviennent les termes de (1), lorqu'on applique cette relation au multigraphe descriptif d'un réseau d'échangeurs acceptable. a sera remplacé par le nombre d'arcs du multigraphe descriptif. Ce nombre d'arcs est toujours $\leqslant E$, mais n'est pas toujours égal à E. En effet, à un même échangeur du réseau acceptable considéré, peuvent correspondre plusieurs arcs du multigraphe descriptif. La contrainte technologique fondamentale ne suffit pas pour interdire cela.

Par contre, cela est impossible si la demande est dispersée. On peut donc affirmer que le remplacement du terme a sera en tout cas $\leqslant E$, et sera égal à E au moins dans le cas où la demande considérée est une demande dispersée.

Passons aux autres termes de la relation (1). Le terme s sera en tout cas (de demande cohérente et de réseau acceptable) remplacé par le nombre N de tâches demandées. Le terme c sera en tout cas remplacé par le terme C, défini comme le nombre cyclomatique du multigraphe descriptif du réseau acceptable considéré. Le terme p sera en tout cas remplacé par P: degré de partition du réseau acceptable considéré, que nous allons définir.

Deux échangeurs du réseau considéré seront déclarés déconnectés, lorsqu'il n'est pas possible de trouver une tâche demandée dont chacun de ces deux échangeurs effectuerait une fraction. Deux sous-réseaux du réseau considéré seront déclarés déconnectés lorsque les échangeurs appartenant au premier sont déconnectés des échangeurs appartenant au second.

Le degré de partition, P, du réseau acceptable considéré, sera le nombre maximum d'éléments dans une division de ce réseau en sous-réseaux déconnectés les uns des autres. Il s'agit d'un paramètre relatif, non seulement au réseau considéré, mais aussi à la demande considérée, et en particulier à la forme sous laquelle elle est présentée.

On peut s'assurer que ce paramètre est égal au nombre de composantes connexes du multigraphe descriptif du réseau considére (bien qu'il ait été défini indépendamment de ce multigraphe), c'est pourquoi il peut remplacer le terme p de la relation (1). Finalement, on obtient une relation valable pour toute demande cohérente et pour tout réseau acceptable:

$$E \leqslant N+C-P \qquad (2)$$

et une relation valable pour toute demande cohérente qui est dispersée et pour tout réseau acceptable:

$$E = N+C-P. \qquad (3)$$

10. APPLICATIONS DES RELATIONS FONDAMENTALES DEDUITES DE LA THEORIE DES GRAPHES

La relation (2) permet de définir une certaine stratégie de diminution de E, applicable quelle que soit la demande cohérente considérée. Pour diminuer E, il faut s'efforcer de diminuer $C-P$, ce que l'on peut décomposer en: s'efforcer d'augmenter P et s'efforcer de diminuer C.

Il semble très difficile de maîtriser la diminution du paramètres C. D'une manière générale, il s'agit d'éviter la formation de cycles dans le multigraphe descriptif. Nous allons voir qu'il semble beaucoup moins difficile de maîtriser l'augmentation du paramètre P.

On montre que le fait qu'il y ait un réseau acceptable avec un degré de partition prenant la valeur P implique qu'il y a une division de la demande cohérente fixée en P sous-demandes cohérentes elles-aussi. Réciproquement, le fait qu'il y ait une division de la demande cohérente fixée en D sous-demandes cohérentes elles aussi, implique qu'il y ait au moins un réseau acceptable dont le degré de partition soit $\geqslant D$.

Cela montre d'abord que D_{MAX} est la valeur maximum que peut prendre P et ensuite que pour augmenter P, il s'agit de:

(1) découvrir des possibilités de division de la demande cohérente considérée en sous-demandes elles aussi cohérentes;

(2) traiter séparément le problème de la satisfaction de chacune des sous-demandes cohérentes.

Nous sommes donc amenés à explorer l'ensemble des possibilités de division de la demande en sous-demandes, à examiner un nombre aussi grand que possible de telles divisions (au total il y en a autant que de partitions d'un ensemble ayant N éléments), et à déterminer pour chacune de ces divisions s'il s'agit ou non d'une division en sous-demandes cohérentes.

On peut dire qu'il s'agira d'une sous-demande cohérente, si et seulement si:

$$Q_F = M(q_F, q_C, e) = Q_C$$

où Q_F désigne la valeur maximum prise par la fonction q_F, Q_C désigne la valeur maximum prise par la fonction q_C.

Dès que l'on a mis en évidence une division de la demande en D sous-demandes cohérentes, on peut envisager séparément le problème de la satisfaction de chacune de ces sous-demandes et ainsi construire un réseau acceptable ayant un degré de partition $P \geqslant D$. En augmentant autant que possible D, on fait tendre P vers D_{MAX}.

L'emploi de cette démarche pour faire augmenter P, n'est pas toujours recommandé; d'abord parce qu'elle risque d'être très coûteuse en moyens de calculs numériques, ensuite, parce que, a priori, ces avantages sont assez incertains:

D'une part, il n'est pas sûr que vouloir à tout pris augmenter P sans s'occuper de C soit une bonne façon d'arriver à diminuer $C-P$. D'autre part, la question de la forme sous laquelle il convient de présenter la demande reste posée. Enfin, cette démarche ne maîtrise pas non plus l'évolution du facteur entropique d'aire d'échange.

Malgré tout, cela nous semble une bonne chose, d'une manière générale, d'envisager les possibilités de diviser la demande cohérente considérée en sous-demandes cohérentes en vue d'augmenter P. Car il existe des circonstances où la démarche devient plus facile (par exemple lorsque des divisions en sous-demandes cohérentes apparaissent clairement à cause de nettes séparations entre divers domaines de températures concernées). Et il existe des circonstances (nous en verrons aux numéros 11 et 12) où la démarche devient moins hasardeuse (sachant, en particulier que, lorsqu'on aboutit à un réseau acceptable et à contre-courant, cela assure de toute façon l'optimisation du facteur entropique d'aire d'échange). Et il est finalement des cas où, toutes les circonstances favorables étant réunies, ce serait une maladresse grave de ne pas en profiter.

11. CAS DE DEMANDES DISPERSEES ET DISPERSABLES

Si on se limite aux demandes cohérentes qui sont dispersées, alors les résultats obtenus précédemment permettent de mieux préciser les possibilités de diminution de E. En effet, la limitation aux demandes cohérentes et dispersées, rend valide la relation (3), d'où l'on déduit, compte tenu des inégalités, $C \geqslant 0$ et $P \leqslant D_{MAX}$: $E \geqslant N - D_{MAX}$.

Le principal intérêt de cette inégalité est, bien entendu, que N et D_{MAX} ne dépendent (pour la valeur de e considérée) que de la demande cohérente et dispersée qui est considérée. Et, comme elle est satisfaite pour tout réseau d'échangeurs acceptables, on obtient :

$$N - D_{MAX} \leqslant E_{MIN}. \tag{4}$$

Or, nous avons vu au paragraphe 4 que, pour une demande dispersée :

$$n = N$$

$$d = D_{MAX}.$$

Ainsi, pour toute demande cohérente et dispersée :

$$n - d \leqslant E_{MIN}.$$

Les paramètres E_{MIN}, n et d, contrairement aux paramètres N et D_{MAX}, sont indépendants de la forme sous laquelle est présentée la demande. On aboutit alors à une conclusion concernant toutes les demandes ordinaires (dispersables), reliant des paramètres qui (pour la valeur de e considérée) ne dépendent que de la demande considérée, sans dépendre de la forme sous laquelle elle est présentée. Pour toute demande cohérente ordinaire :

$$n - d \leqslant E_{MIN}. \tag{5}$$

Ainsi, lorsqu'on a affaire à une demande cohérente ordinaire, l'obtention d'un réseau d'échangeurs acceptable ayant $(n-d)$ échangeurs permettrait d'assurer que l'on a obtenu un réseau d'échangeurs acceptable ayant le plus petit nombre d'échangeurs que puisse avoir un tel réseau.

Ainsi, lorsqu'on a affaire à une demande cohérente ordinaire, on peut toujours espérer être dans un cas favorable où :

$$E_{MIN} = n - d.$$

(Nous verrons au paragraphe suivant des cas où cet espoir devient une certitude.) Et, par conséquent, on peut toujours envisager la recherche d'un réseau d'échangeurs acceptable et ayant $n-d$ échangeurs. On est alors renvoyé à la démarche d'augmentation de P exposée au paragraphe précédent. Mais, maintenant, une incertitude a disparu et une autre peut disparaître.

L'incertitude qui a disparu concerne la forme sous laquelle doit être présentée la demande. Il convient que ce soit une forme pour laquelle $D_{MAX} = d$. Aussi, il convient de mettre la demande cohérente ordinaire considérée, sous la seule forme qui la fasse apparaître comme une demande dispersée.

L'incertitude qui pourrait disparaître, concerne la question : est-ce que à s'efforcer d'augmenter P, on ne compromet pas la diminution de $C-P$?

Dans le cas d'une demande cohérente dispersée, cette certitude disparaitrait si l'on arrivait effectivement à construire un réseau applicable ayant $N - D_{MAX}$ échangeurs. Pour arriver à un réseau ayant $N - D_{MAX}$ échangeur, on est amené à trouver une division de la demande en D_{MAX} sous-demandes cohérentes. Si l'on part d'une demande cohérente dispersée, chacune des D_{MAX} sous-demandes de cette division sera elle-même cohérente, dispersée, connexe, et, par conséquent, si elle comporte N tâches, elle ne pourra être satisfaite qu'avec un nombre d'échangeurs au moins égal à $N-1$.

Donc, si l'on veut obtenir pour la demande totale un réseau d'échanges acceptable ayant $(N - D_{MAX})$ échangeurs, il faut absolument que chacune des sous-demandes obtenues soit satisfaite par un réseau acceptable (à l'égard de cette sous-demande) ayant un nombre d'échangeurs minimum, c'est-à-dire $N-1$, où N désigne le nombre de tâches de la sous-demande considérée.

Pour chaque sous-demande, en vue d'atteindre l'objectif d'un nombre d'échangeurs égal à $N-1$, on peut songer à construire un réseau acceptable sans couplage doublement inachevé, et pour cela on peut envisager l'emploi de la procédure exposée au paragraphe 8.

Au total, lorsqu'on a affaire à une demande cohérente ordinaire, il apparaît possible, dans des cas particulièrement favorables (ceux où le maximum de P assurerait le minimum de $C-P$) d'obtenir un réseau acceptable, dont on soit assuré qu'il a le petit nombre d'échangeurs que puisse avoir un tel réseau.

Resterait alors à examiner si le facteur entropique d'aire d'échange du réseau obtenu permet qu'on retienne ce réseau (question qui recevrait une réponse affirmative dans le cas où le réseau obtenu serait de plus à contre-courant).

Considérons enfin le cas, encore plus particulier, où la demande cohérente considérée serait une demande cohérente ordinaire ayant le plus grand d que puisse avoir une démarche cohérente ordinaire pour un n_F et un n_C donnés, c'est-à-dire :

$$d = \mathrm{Min}\,(n_F, n_C).$$

En ce cas :

$$n - d = n_F + n_C - \mathrm{Min}\,(n_F, n_C) = \mathrm{Max}\,(n_F, n_C).$$

Pour une telle demande cohérente et ordinaire, l'obtention d'un échangeur acceptable et ayant $(n-d)$ échangeurs, signifierait qu'on a obtenu le minimum signalé au paragraphe 5.

12. CONSIDERATIONS LIEES AUX PROPRIETES DE RESEAUX A CONTRE-COURANT

Fixons une demande cohérente, supposée être sous une forme telle que:

$$N = n, D_{MAX} = d.$$

Rangeons dans un certain ordre, d'une part les N_F réchauffements demandés, d'autre part les N_C refroidissements demandés. A tout p compris entre 1 et N_F correspond le débit thermique $D_F(p)$ pris au total par les tâches de réchauffements dont le numéro est $\leqslant p$. A tout p compris entre 1 et N_C correspond le débit thermique $D_C(p)$ fourni au total par les tâches de refroidissements dont le numéro est $\leqslant p$.

Les valeurs de $D_F(p)$ pour p allant de 1 à (N_F-1) et les valeurs de $D_C(p)$ pour p allant de 1 à (N_C-1) constituent un ensemble de 'valeurs particulières' de l'intervalle $]0, Q_I[$. Ces 'valeurs particulières' déterminent une division de l'intervalle $[0, Q_I]$ en sous-intervalles. Soit N^*, le nombre de sous-intervalles de $[0, Q_I]$ ainsi obtenus. N^* vaut le nombre de 'valeurs particulières' augmenté d'une unité, donc en tout cas:

$$N^* \leqslant (N_F-1)+(N_C-1)+1 = N-1.$$

Mais N^* peut être $<N-1$, car il peut y avoir des coïncidences entre 'valeurs particulières' correspondant aux réchauffements demandés et 'valeurs particulières' correspondant aux refroidissements demandés.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la demande fixée est découpée verticalement. Alors chacun des N^* sous-intervalle de $[0, Q_I]$ que nous avons obtenu détermine un échangeur. Et l'ensemble de ces échangeurs constitue un réseau d'échangeurs à contre-courant, donc acceptable, compact, et ayant N^* échangeurs. Cela a lieu, quels que soient l'ordre choisi pour ranger les réchauffements demandés et l'ordre choisi pour ranger les refroidissements demandés. Lorsqu'on fait varier ces deux ordres, on obtient toutes les possibilités de réseau acceptable, à contre-courant, compact. Et on peut s'assurer, en tenant compte de la définition de D_{MAX}, que ces deux ordres peuvent être choisis de manière que N^* prenne la valeur $N-D_{MAX}$, mais qu'ils ne peuvent être choisis de manière que N^* prenne une valeur inférieure à $N-D_{MAX}$.

Ainsi dans ce cas, où la demande fixée est découpée verticalement, $(N-D_{MAX})$ est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable à contre-courant.

Passons maintenant au cas où la demande cohérente fixée est découpée horizontalement. En ce cas, chacun de N^* sous-intervalle de $[0, Q_I]$ qui a été obtenu, détermine un couplage possible. Mais ces couplages ne constituent un réseau d'échangeurs à contre-courant, que si les réchauffements demandés d'une part et les refroidissements demandés d'autre part ont été rangés par ordre croissant (ou par ordre décroissant) de températures concernées.

Le réseau ainsi obtenu (qui est le même que l'on choisisse l'ordre croissant ou l'ordre décroissant) est le seul réseau acceptable, à contre-courant et compact. Son nombre d'échangeurs est égal à N^*, donc $\leqslant N-1$, et il est facile de s'assurer que pour ce cas de demande et pour ce cas de rangement des éléments de la demande:

$$N^* \geqslant N-D_{MAX}.$$

On peut alors affirmer les deux propositions suivantes.

Proposition 1. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande cohérente et découpée verticalement, $(n-d)$ est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable et à contre-courant.

Proposition 2. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande cohérente et découpée horizontalement, il existe un et un seul réseau d'échangeurs acceptable à contre-courant et compact. Ce réseau a un nombre d'échangeurs E tel que:

$$n-d \leqslant E \leqslant n-1.$$

Considérons encore une fois une demande cohérente découpée horizontalement, pour s'intéresser cette fois aux réseaux acceptables qui ne sont pas nécessairement à contre-courant. Supposons que la demande est mise sous une forme telle que $n = N$, $d = D_{MAX}$. On peut trouver une division de cette demande en d sous-demandes cohérentes.

Chacune des sous-demandes cohérentes ainsi obtenue est elle-même découpée horizontalement et peut donc être satisfaite dans un réseau d'échangeurs acceptable (relativement à cette sous-demande) à contre-courant et constitué d'un nombre d'échangeurs $\leqslant n-1$, où n désigne le nombre de tâches de la sous-demande considérée.

La réunion des d réseaux d'échangeurs ainsi obtenue, constitue un réseau d'échangeurs acceptable (relativement à la demande considérée) et ayant un nombre d'échangeurs $\leqslant n-d$. Nous avons aussi démontré la proposition suivante.

Proposition 3. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande cohérente et découpée horizontalement, il existe au moins un réseau acceptable ayant un nombre d'échangeurs $\leqslant n-d$.

Les propositions 1 et 3 montrent que, dans le cas d'une demande cohérente ordinaire, la valeur $(n-d)$ au-dessous de laquelle E ne peut pas descendre, peut cependent être atteinte, pourvu que la demande soit convenablement découpée.

La proposition 1 montre que, dans le cas d'une demande cohérente ordinaire et de type (V, V), parmi les réseaux d'échangeurs acceptable, il en est qui sont optimaux à la fois par leur nombre d'échangeurs et par leur facteur entropique d'aire d'échange. Si l'on considère maintenant le cas des demandes strictement cohérentes et découpées horizontalement ou verticalement, on peut appliquer les propositions 1, 2 et

3, en tenant compte de cela que, tous les réseaux acceptables sont à contre-courant. On obtient alors les deux propositions suivantes.

Proposition 4. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande strictement cohérente et découpée verticalement, $(n-d)$ est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable et à contre-courant.

Proposition 5. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande strictement cohérente et découpée horizontalement, il existe un seul réseau acceptable et compact ; ce réseau a un nombre d'échangeurs égal à $n-d$.

La proposition 5 montre un cas extrême où la construction d'un réseau acceptable oblige à construire un réseau pour lequel $E = n-d$.

Considérons une demande cohérente et à découpage croisé. Supposons-la mise sous une forme compacte. Appelons couplage possible tout couple formé par l'un des réchauffements demandés et l'un des refroidissements demandés. Dans tout réseau acceptable et à contre-courant, tout couplage possible est concerné par un échangeur au moins. Et il est facile de concevoir un réseau acceptable et à contre-courant, dans lequel tout couplage possible est concerné par un échangeur au plus. On est donc conduit à affirmer la proposition suivante.

Proposition 6. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande cohérente à découplage croisé, $n_F \cdot n_C$ est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable et à contre-courant.

La proposition précédente appliquée au cas d'une demande strictement cohérente, où tout réseau acceptable est nécessairement à contre-courant, donne la proposition suivante.

Proposition 7. Pour toute valeur attribuée à e, pour toute demande strictement cohérente à découplage croisé, $n_F \cdot n_C$ est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre d'échangeur d'un réseau acceptable.

Examinons davantage le cas d'une demande strictement cohérente et à découpage croisé. Supposons cette demande mise sous forme compacte.

Compte tenu de (2), on a, pour tout réseau acceptable :

$$C \geqslant E+P-N \geqslant E+1-N \geqslant n_F \cdot n_C + 1-(n_F+n_C) = (n_{F-1}) \cdot (n_{C-1}).$$

Ainsi, si pour une demande cohérente fixée, l'on désigne par C_{MIN} la valeur minimum que peut prendre le paramètre C d'un réseau acceptable, on a obtenu ce résultat, pour une demande strictement cohérente et à découpage croisé : $C_{MIN} \geqslant (n_{F-1}) \cdot (n_{C-1})$.

On voit que le paramètre C_{MIN} d'une demande cohérente, peut dépasser, lorsque cette demande varie, toute limite fixée a priori. C'est dire que pour de nombreuses demandes, tous les réseaux acceptables comporteront de nombreux cycles.

L'intérêt de la considération de ces extrêmes que sont les demandes cohérentes à découpage horizontal, vertical, ou croisé, c'est de faire deviner toute une échelle de demandes cohérentes commençant avec celles qui sont découpées verticalement ou horizontalement et allant vers des demandes cohérentes de plus en plus mal découpées du point de vue des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs, pour finir avec ou après les demandes cohérentes qui sont à découpage croisé.

Les mieux découpées assurent qu'on peut atteindre pour le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable, la valeur $(n-d)$, et même, dans le cas d'une demande cohérente découpée verticalement, qu'on peut l'atteindre avec un réseau à contre-courant.

Les plus mal découpées obligent, si l'on veut un réseau acceptable, à un nombre d'échangeurs $\geqslant N_F \cdot N_C$.

C'est bien la découpe de la demande qui est la facteur essentiel pour expliquer de telles différences. Il est, en effet, facile de construire des exemples où trois demandes cohérentes, la première découpée verticalement, la deuxième découpée horizontalement, la troisième à découpage croisé, seront toutes les trois représentées par le même couple de fonctions q_F, q_C.

Maintenant, il faut remarquer que la valeur critique inférieure $(n-d)$ correspond, pour une demande cohérente qui ne peut plus être divisée en sous-demandes cohérentes, à la valeur non garantie par l'absence de couplage doublement inachevé et que la valeur critique supérieure $(n_F \cdot n_C)$ correspond à une limite dont l'absence de couplage multiple garantit qu'elle ne sera pas dépassée.

Notre sentiment est que les demandes cohérentes pour lesquelles $E_{MIN} > n_F \cdot n_C$ sont relativement rares, du moins tant qu'on se limite aux demandes cohérentes qui sont linéaires dans leurs détails.

13. NOMBRE MINIMUM D'ECHANGEURS D'UN RESEAU ACCEPTABLE ET A CONTRE-COURANT DANS LE CAS D'UNE DEMANDE COHERENTE LINEAIRE DANS SES DETAILS

Fixons une demande cohérente linéaire dans ses détails. Les résultats obtenus, pour ce qui concerne les demandes cohérentes découpées verticalement, permettent d'envisager un algorithme d'évaluation du nombre minimum d'échangeurs d'un réseau acceptable et à contre-courant.

Considérons les valeurs particulières de l'intervalle $[0, Q_1]$ qui peuvent se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

$$q_F(T_1), \quad q_F(T_2)$$

$$q_C(T_3), \quad q_C(T_4)$$

où T_1 désigne la température d'entrée de l'un des réchauffements demandés ; T_2 désigne la température de sortie de l'un des refroidissements demandés ; T_3 désigne la température d'entrée de l'un des refroidissements demandés; T_4 désigne la température de sortie de l'un des réchauffements demandés.

Ces valeurs (qui sont en nombre $\leqslant 2 \cdot N$) déterminent un partage de l'intervalle $[0, Q_I]$ et un certain nombre de sous-intervalles. Nous appellerons sous-intervalles spéciaux, les sous-intervalles de $[0, Q_I]$ ainsi obtenus. Chaque intervalle spécial détermine une partie de la demande cohérente fixée, nous appellerons parties verticales de la demande les parties de la demande ainsi obtenues. Une partie verticale de la demande ne coïncide généralement pas avec une sous-demande de cette demande. Mais il s'agit en tout cas d'une partie de la demande fixée, qui constitue elle-même une demande cohérente et découpée verticalement.

La conception d'un réseau à contre-courant et acceptable à l'égard d'une partie verticale de la demande fixée, peut alors être envisagée en s'appuyant sur la procédure présentée au début du numéro 12.

Pour chaque partie verticale de la demande, on choisit un ordre pour les réchauffements concernés par cette partie et un ordre pour les refroidissements concernés par cette partie. Cela détermine un réseau à contre-courant acceptable relativement à cette partie verticale de la demande.

Nous appellerons réseau vertical, un réseau associé de cette façon à une partie verticale de la demande. En choisissant, pour chaque partie verticale de la demande, un ordre de rangement des tâches de réchauffement concernées et un ordre de rangement des tâches de refroidissements concernées, on associe à chaque partie verticale de la demande un réseau vertical.

En rassemblant les réseaux verticaux ainsi obtenus, on obtient un réseau à contre-courant acceptable relativement à la totalité de la demande fixée. Ce réseau peut être mis sous forme compacte de manière que son nombre d'échangeurs paraisse le plus petit possible. En faisant varier toutes les possibilités offertes au choix des divers rangements qui déterminent un tel réseau, on obtiendrait le nombre minimum E^*_{MIN} d'échangeurs d'un réseau acceptable et à contre-courant. Mais si l'examen de toutes les possibilités de rangements est, en principe, possible puisque le nombre de possibilités est fini [et en tout cas $\leqslant (2 \cdot N \cdot N_F!\, N_C!)$], en pratique, il sera généralement impossible faute de moyens de calcul numériques suffisants. On peut alors se tourner vers un objectif plus modeste, déterminer un majorant du nombre E^*_{MIN}.

Une procédure très simple, s'appuyant essentiellement sur la proposition 1, permet d'obtenir un tel majorant. Il suffit de calculer la valeur de la différence (degré de fractionnement − degré de déconnexion) pour chaque partie verticale de la demande fixée et d'ajouter les valeurs ainsi obtenues.

Le majorant de E^*_{MIN} ainsi obtenu risque d'être, dans la plupart des cas, très supérieur à E^*_{MIN} parce qu'il ne tient pas compte des possibilités de regrouper plusieurs échangeurs appartenant à des réseaux verticaux distincts en un seul échangeur.

Néanmoins, on pourrait considérer ce majorant comme une mesure de la difficulté de diminuer le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable pour la demande considérée.

14. NOMBRE MINIMUM D'ECHANGEURS D'UN RESEAU ACCEPTABLE DANS LE CAS D'UNE DEMANDE SCINDEE ET IMPORTANCE DU FACTEUR σ

Dans le cas d'une demande scindée, en profitant de la liberté de couplage signalée dans la première de ce travail, il est facile de classer dans un ordre convenable les réchauffements demandés d'une part et les refroidissements demandés d'autre part, de manière à déterminer un réseau acceptable ayant un nombre d'échangeurs au plus égal à $n-d$.

On voit (en faisant appel au facteur σ de liberté des couplages introduit la première partie) que si la valeur $\sigma = 0$ (demandes strictement cohérentes) implique $E_{\mathrm{MIN}} \geqslant E^*_{\mathrm{MIN}}$, par contre la valeur $\sigma = 1$ (demandes scindées) implique $E_{\mathrm{MIN}} \leqslant n-d$.

D'une manière générale, E^*_{MIN} est sans doute très supérieur à $n-d$. On peut donc regarder σ comme un paramètre important en vue de caractériser, pour une demande et une valeur de e fixées, la difficulté de diminuer le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable.

15. CONCLUSION

Le problème posé par la conception d'un réseau d'échangeurs est ici simplifié, en considérant qu'il s'agit de réaliser un compromis entre diminution de la consommation d'utilités, diminution du facteur entropique d'aire d'échange et diminution du nombre d'échangeurs. Le plus souvent, une simplification supplémentaire est apportée en se limitant à des demandes qui peuvent être satisfaites sans faire appel à des utilités, et à des réseaux qui les satisfont de cette façon. En sorte que ne subsiste plus que le problème du compromis entre diminution du facteur entropique d'aire d'échange et diminution du nombre d'échangeurs. Cette simplification supplémentaire a toutefois un inconvénient. Elle implique l'abandon des problèmes posés par le choix des tâches qu'il faut confier au réseau interne, le choix des réchauffements que devront subir les utilités froides, et le choix des refroidissements que devront subir les utilités chaudes.

Les simplifications faites ont permis d'abord de dégager avec une grande netteté les propriétés fondamentales des réseaux à contre-courant, d'une manière qui, pensons-nous, complète utilement le travail fait par Nishida *et al.* [3] et les remarques que nous avions faites à ce sujet dans [2]. En particulier, pour toute notre étude, il est essentiel de passer des énoncés proposés par Nishida à l'énoncé suivant. Si l'on a affaire à une demande qui peut être satisfaite sans faire appel à des utilités, alors parmi les réseaux qui la satisfont sans faire appel à des utilités, les réseaux à contre-courant sont ceux qui ont le plus petit facteur entropique d'aire d'échange. Cet énoncé explique que l'on ait substitué à l'objectif de diminuer l'aire d'échange, celui de diminuer le facteur entropique d'aire d'échange. Alors, pour les réseaux qui ne font pas appel aux utilités et qui sont à contre-courant, reste seulement posée la question du nombre d'échangeurs.

Nous avons ensuite approfondi encore les principes de division de la demande que Linnhoff présentait sous le nom de 'pinchs principles' et que nous avions commencé à approfondir dans [2]. Nous avons obtenu ici une définition des couples limites qui assure que, pour toute demande et toute valeur attribuée à e, il existe au moins un couple limite. Compte tenu de l'apparition des couples limites qui ne figurent pas dans la catégorie des couples limites ordinaires, les principes de division de la demande, imposés si l'on veut la récupération d'énergie optimale sous la contrainte $\Delta T \geqslant e$, deviennent plus précis, en particulier par les distinctions qu'ils s'imposent entre inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) et inégalités strictes ($<$ ou $>$). On montre comment ces principes de division conduisent à ce résultat : avec certaines demandes extrêmes, les demandes strictement cohérentes, tout couple situé sur la droite Δ est un couple limite, ces demandes ne peuvent être satisfaites, en refusant l'appel aux utilités et en respectant la contrainte $\Delta T \geqslant e$, que dans un réseau à contre-courant. Ce résultat prend tout son intérêt, lorsqu'on le place dans l'ensemble des propriétés des résaux à contre-courant qui ont été remarquées. Nous avons vu cependent, qu'il y a lieu de ne considérer le cas des demandes strictement cohérentes, que comme un cas limite.

On signale l'existence d'un cas limite opposé, celui des demandes scindées, et la possibilité d'évaluer un facteur de liberté des couplages, prenant la valeur 0 avec les demandes strictement cohérentes et la valeur 1 avec les demandes scindées.

On a ensuite abordé l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs. Cette étude ne peut avoir de sens que par rapport aux contraintes technologiques admises. Ici nous avons admis que les réchauffements (respectivement les refroidissements) effectués dans un échangeur doivent constituer une seule tâche. D'autre part, l'étude des possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs, la représentation globale de la demande, constituée par le couple de fonctions (q_F, q_C) devient insuffisante. Il faut introduire des paramètres représentatifs de ce que nous avons appelé les détails de la demande. En particulier, on est amené à tenir compte parfois des détails qui distinguent deux demandes équivalentes (au sens introduit dans le paragraphe 3).

L'étude faite n'a pu que sommairement caractériser les possibilités de diminution du nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable, et expliquer comment elles varient avec la demande considérée. D'une manière générale, les possibilités de diminuer le nombre d'échangeurs d'un réseau acceptable semblent se réduire à mesure que :

- augmente les valeurs absolues des $\partial C_p/\partial T$ concernés ;
- l'on passe, lorsque le facteur de liberté des couplages augmente, des demandes scindées aux demandes strictement cohérentes ;
- l'on passe de demandes proches de celles à découpe horizontale ou verticale à des demandes proches de celles à découpe croisée.

Selon les caractéristiques de la demande cohérente considérée (et selon la valeur de e), le nombre minimum d'échangeurs d'un réseau acceptable peut prendre, pour n_F et n_C donnés, toutes les valeurs comprises entre Max (n_F, n_C) et l'infini.

La portée de ces conclusions est cependant limitée par le fait que nous ne considérons que des demandes cohérentes et des réseaux qui, pour être considérés comme acceptables doivent être autonomes. Elle est limitée aussi, en principe, par suite de la contrainte technologique fondamentale que nous avons admise.

Cependant, même si cette contrainte était rejetée, on peut toujours évaluer des paramètres comme E, E_{MIN} et E^*_{MIN} qui, même s'ils ne représentent plus des nombres d'échangeurs, représentent toujours des nombres d'échanges (éventuellement regroupables, dès que la contrainte technologique fondamentale est rejetée, au sein d'un même échangeur). De tels paramètres, qui ne caractériseraient plus la difficulté de diminuer le nombre d'échangeurs, continueraient sans doute à caractériser les difficultés technologiques de réalisation du réseau.

REFERENCES

1. C. Guiglion, S. Domenech et L. Pibouleau, Récupération optimale de l'énergie dans les réseaux d'échangeurs de chaleur—I. Etude théorique, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 243–250 (1989).
2. C. Guiglion, S. Domenech, L. Pibouleau et M. Belkebir, Récupération optimale de l'énergie dans les réseaux d'échangeurs de chaleur—II. Etude de cas particuliers et classification des réseaux possibles, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 251–260 (1989).
3. N. Nishida, S. Kobayashi and A. Ichikawa, Optimal synthesis of heat exchange systems. Necessary conditions for minimum heat transfer area and their application to system synthesis, *Chem. Engng Sci.* **26**, 1841–1856 (1971).
4. B. Linnhoff and E. Hindmarsh, The pinch design method for heat exchanger networks, *Chem. Engng Sci.* **38**, 745–763 (1983).
5. B. Linnhoff and J. A. Flower, Synthesis of heat exchanger networks, *A.I.Ch.E. Jl* **24**, 633–642 (1978).
6. C. Berge, *Théorie des Graphes et ses Applications*. Dunod, Paris (1963).
7. M. Belkebir, Conception de réseaux d'échangeurs de chaleur, Thèse Doctorat, INP Toulouse (1989).

THERMODYNAMICS OF HEAT EXCHANGER NETWORKS AND POSSIBILITIES TO REDUCE THE HEAT EXCHANGER NUMBER IN THESE NETWORKS—II. POSSIBILITIES TO REDUCE THE HEAT EXCHANGER NUMBER

Abstract—The thermodynamic approach presented in the first part of the paper is used to study the possibilities to reduce the number of heat exchangers. From a review of these possibilities, some penalizing factors such as a wrong arrangement of temperature intervals under consideration, near conditions to the strictly consistent demands and variations with temperature of specific heats are identified.

DIE THERMODYNAMIK VON WÄRMETAUSCHERNETZWERKEN UND MÖGLICHKEITEN ZUR REDUZIERUNG IHRER GRÖSSE—II. MÖGLICHKEITEN ZUR REDUZIERUNG DER ANZAHL VON WÄRMEAUSTAUSCHERN

Zusammenfassung—Im ersten Teil dieser Arbeit wurde ein thermodynamischer Ansatz vorgestellt, der nun zur Untersuchung der Möglichkeiten einer Reduktion der Anzahl von Wärmeaustauschern verwendet wird. Aufgrund einer Überprüfung dieser Möglichkeiten werden einige sträfliche Maßnahmen wie beispielsweise eine falsche Anordnung von Temperaturintervallen betrachtet. Es werden Bedingungen gefunden, die nahe an die streng konsistenten Forderungen herankommen, auch temperaturabhängige Änderungen der spezifischen Wärmekapazitäten werden betrachtet.

ТЕРМОДИНАМИКА СИСТЕМ ТЕПЛООБМЕННИКОВ И ВОЗМОЖНОСТЬ СНИЖЕНИЯ ИХ ЧИСЛА В СИСТЕМАХ—II. ВОЗМОЖНОСТИ СНИЖЕНИЯ ЧИСЛА ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Аннотация—Термодинамический подход, предложенный в первой части статьи, используется для исследования возможности снижения числа теплообменников. Для этой цели выделены некоторые отрицательные факторы, такие как неправильная компановка температурных интервальов, отступление условий от строго согласованных требований и изменение удельной теплоты с изменением температуры.